



## Mathématiques et sciences humaines

Mathematics and social sciences

161 | Printemps 2003

Recherche opérationnelle et aide à la décision

---

# Résolution de problèmes d'agrégation de préférences via l'approximation par des matrices bistochastiques

*Solving aggregation of preferences problems using doubly stochastic matrix approximation*

Pawoumodom-L. Takouda

---



### Electronic version

URL: <http://journals.openedition.org/msh/2881>

DOI: 10.4000/msh.2881

ISSN: 1950-6821

### Publisher

Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

### Printed version

Date of publication: 1 March 2003

ISSN: 0987-6936

### Electronic reference

Pawoumodom-L. Takouda, « Résolution de problèmes d'agrégation de préférences via l'approximation par des matrices bistochastiques », *Mathématiques et sciences humaines* [Online], 161 | Printemps 2003, Online since 10 February 2006, connection on 04 May 2019. URL : <http://journals.openedition.org/msh/2881> ; DOI : 10.4000/msh.2881

---

## RÉSOLUTION DE PROBLÈMES D'AGRÉGATION DE PRÉFÉRENCES VIA L'APPROXIMATION PAR DES MATRICES BISTOCHASTIQUES

Pawoumodom L. TAKOUDA <sup>1</sup>

**RÉSUMÉ** – *Dans ce travail, nous étudions les problèmes classiques d'agrégations de préférences. Nous proposons une suite aux travaux de J. M. Blin [5]. Sous certaines hypothèses, Blin ramenait le problème d'agrégation de préférences à celui de la recherche de la matrice de permutation la plus proche d'une matrice bistochastique (dite normalisée de la matrice d'agrément du problème, qui agrège les informations contenues dans les préférences individuelles exprimées). En affaiblissant ces hypothèses (notamment celles de préférences strictes qui doivent porter sur l'ensemble des candidats), nous proposons un schéma à deux phases pour résoudre le problème. La première phase consiste à approcher la matrice contenant les informations des préférences exprimées (qui n'est plus bistochastique) par une matrice bistochastique grâce à un algorithme mis au point par l'auteur [20]. On se ramène alors au même problème que celui considéré par Blin et qui peut être résolu par programmation linéaire ou plus simplement comme un problème de mariages dans un graphe bipartite pondéré (weighted bipartite matching problem, en anglais).*

**MOTS-CLÉS** – Agrégation de préférences, Matrices bistochastiques, Matrices de permutation, Projections alternées.

**SUMMARY** – Solving aggregation of preferences problems using doubly stochastic matrix approximation.

*In this work, we consider the classical problem of aggregation of preferences. We extend a previous work by Blin [5]. Under some assumptions, he formulated this problem as that of finding the nearest permutation matrix to a doubly stochastic matrix (called normalized of the agreement matrix, which collects the information contained in the expressed individual preferences). We reduce these assumptions, and we introduce a two-phase scheme for solving the problem. The first phase consists in approximating the matrix that contains the individual preferences information (which loses here the doubly stochastic character) by a doubly stochastic matrix using an algorithm proposed by the author [20] in a previous work. We thereby reduce the more general problem to that considered by Blin, which can be solved by using linear programming or, more directly, as a weighted bipartite matching problem.*

**KEYWORDS** – Aggregation of preferences, Doubly stochastic matrices, Permutation matrices, Alternating projections.

---

<sup>1</sup>Mathématiques pour l'Industrie et la Physique (MIP), UMR CNRS 5640, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31000 Toulouse cedex 04, takouda@mip.ups-tlse.fr

## 1. INTRODUCTION

De nombreux problèmes de décision qui se posent en pratique ne peuvent être considérés en ne tenant compte que d'un seul point de vue. On peut citer en exemple les cas d'une société qui doit choisir entre plusieurs projets en tenant compte de différents critères : profit, durée, état du marché, risque, etc. ou celui d'électeurs qui doivent choisir entre différents candidats. Ces situations conduisent à des problèmes dits *d'agrégation de préférences*.

De nombreuses approches existent pour ce problème. Nous proposons ici une modélisation qui permet de représenter les préférences par des matrices dont toutes les composantes sont 0 ou 1. Ces préférences sont agrégées en utilisant une procédure d'agrégation par pondérations. Nous retrouvons ainsi la formulation proposée par Blin [5] en 1976 quand nous considérons les mêmes hypothèses que lui sur les préférences. Celles-ci imposaient aux préférences d'être des relations d'ordre strict et de porter sur la totalité des candidats. Cela lui permettait d'agréger les préférences exprimées en une matrice qui, compte tenu des hypothèses sur les préférences, est *bistochastique*. On ramenait alors le problème à celui de chercher la matrice de permutation la plus proche de cette matrice bistochastique. Cela revient à se placer dans un ensemble convexe compact, le polytope des matrices bistochastiques, et à chercher le point extrémal du convexe le plus proche d'un point donné de cet ensemble. Nous nous sommes donnés ici des hypothèses moins restrictives. Dans un premier temps, cela fait perdre le caractère bistochastique de la matrice agrégeant les préférences. Nous récupérons cette propriété en effectuant une approximation de cette matrice par une matrice bistochastique, en utilisant un algorithme que nous avons mis au point. Cela nous permet de retrouver le même type problème que celui considéré par Blin, qui finalement se ramène à un problème de programmation linéaire ou à un problème de mariages dans un graphe bipartite pondéré (*weighted bipartite matching problem*, en anglais).

La suite de ce travail se présente comme suit. La prochaine section est consacrée au problème d'approximation d'une matrice quelconque par une matrice bistochastique. En section 3, nous présentons un court rappel sur les problèmes d'agrégation de préférences, suivi de la modélisation matricielle que nous en proposons. Au passage, nous montrons qu'elle coïncide avec celle de Blin, lorsque l'on se restreint aux hypothèses nécessaires pour cet auteur. De ce fait, on peut dire que nous généralisons cette modélisation. En section 4, nous présentons une mise en oeuvre numérique sur des exemples du schéma que nous avons proposé pour résoudre le problème, avec applications sur des exemples. Nous concluons en section 5.

## 2. APPROXIMATION PAR MATRICES BISTOCHASTIQUES

On se place, dans toute la suite de ce travail et sauf indication contraire, dans l'espace  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  des matrices carrées d'ordre  $n$ . On le munit du produit scalaire dit de Fröbenius

$$\langle\langle A, B \rangle\rangle = \text{tr}(A^T B),$$

où  $A^T$  désigne la transposée de la matrice  $A$  et  $tr(A)$  la trace, c'est-à-dire la somme des termes diagonaux de la matrice  $A$ . Cela induit sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une structure d'espace euclidien dont la norme associée est

$$\|A\| = (tr(A^T A))^{\frac{1}{2}}.$$

Soit  $M = (a_{ij})_{i,j}$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Nous notons  $e$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  défini par :

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**DÉFINITION 1**  *$M$  est appelée matrice bistochastique si elle vérifie :*

1.  $M \geq 0$  au sens des composantes (c'est-à-dire toutes les composantes sont positives),
2.  $Me = e$ ,
3.  $M^T e = e$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé, nous noterons  $\mathbb{B}_n$  l'ensemble des matrices bistochastiques d'ordre  $n$ .

On peut montrer que  $\mathbb{B}_n$  est un polyèdre convexe compact de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (voir [14]).

Nous savons que les points les plus importants d'un polyèdre convexe, en particulier du point de vue optimisation, sont ses points extrémaux. Dans la suite, nous allons nous intéresser à de tels points pour  $\mathbb{B}_n$ .

**DÉFINITION 2** (Point extrémal d'un polyèdre) *Soit  $\mathcal{C}$  un ensemble convexe.*

*Un point  $x$  est appelé **point extrémal** de  $\mathcal{C}$  s'il appartient à  $\mathcal{C}$  et s'il ne peut s'exprimer comme une combinaison convexe  $x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$  d'éléments  $x_1$  et  $x_2$  de  $\mathcal{C}$  avec  $0 < \alpha < 1$  et  $x \neq x_1$ ,  $x \neq x_2$ .*

**DÉFINITION 3** (Matrice de permutation [15]) *Soit  $P$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .*

*On dit que  $P$  est une **matrice de permutation** si toutes ses lignes et toutes ses colonnes ont chacune exactement une composante égale à 1, toutes les autres étant égales à 0.*

Le théorème suivant donne exactement les points extrémaux de  $\mathbb{B}_n$ .

**THÉORÈME 1** (Birkhoff, 1946 [15]) *Une matrice bistochastique  $S$  est un point extrémal de  $\mathbb{B}_n$  si, et seulement si,  $S$  est une matrice de permutation.  $\square$*

Le Théorème de Birkhoff (ou de Birkhoff-von Neumann suivant les auteurs) est un résultat très connu en Analyse convexe. Dans un précédent travail [20], nous en avons proposé une démonstration basée sur de la programmation linéaire.

Il y a eu énormément de travaux mathématiques concernant les matrices bistochastiques, concernant notamment sa géométrie, la conjecture de van Der Waerden (voir [15]), récemment démontrée et aussi concernant son utilisation dans différents domaines. On pourra consulter pour cela [20].

Nous nous attachons maintenant à trouver la matrice bistochastique la plus proche d'une matrice donnée.

## 2.1. APPROXIMATION PAR MATRICES BISTOCHASTIQUES

Nous nous plaçons dans un cadre de travail identique à celui de N. Higham [13]. La définition suivante précise la notion de problème d'approximation. Considérons un espace vectoriel normé (de matrices)  $E$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$  et  $S$  une partie de  $E$ .

**DÉFINITION 4** *On appelle problème d'approximation le problème suivant : étant donné  $x \in E$ , on cherche  $\bar{x} \in S$  tel que :*

$$\|x - \bar{x}\| = \inf\{\|x - s\|, s \in S\}.$$

Un problème d'approximation consiste donc à trouver un élément de  $S$  le plus proche (au sens de la norme  $\|\cdot\|$ ) de  $x$ . Lorsque  $S$  est fermé, on a en général existence d'un tel élément. Par contre, son unicité n'est pas toujours acquise. De plus, le calcul effectif de cet élément n'est pas toujours facile.

Envisageons maintenant un problème d'approximation portant sur les matrices bistochastiques dans l'espace euclidien  $E = (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot; \cdot \rangle)$ . On prend  $S = \mathbb{B}_n$  et le problème d'approximation s'exprime comme suit :

$$(P) \begin{cases} \text{Soit } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \\ \text{Trouver } \overline{\overline{M}} \in \mathbb{B}_n \text{ tel que :} \\ \|M - \overline{\overline{M}}\| = \inf\{\|M - S\|, S \in \mathbb{B}_n\}. \end{cases}$$

Or, on sait que  $\mathbb{B}_n$  est un ensemble convexe compact de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . D'autre part,  $\mathbb{B}_n$  a la particularité d'être contenu dans un sous-espace affine de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et est donc d'intérieur vide.

Compte tenu de ces remarques, la réponse au problème d'approximation  $(P)$  est donnée par le Théorème de projection (voir [8]). On a :

**PROPOSITION 1** *Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .*

*Il existe une et une seule matrice bistochastique  $\overline{\overline{M}}$  telle que :*

$$\|M - \overline{\overline{M}}\| = \inf\{\|M - S\|, S \in \mathbb{B}_n\}.$$

*La matrice  $\overline{\overline{M}}$  est caractérisée par :*

$$\begin{cases} \overline{\overline{M}} \in \mathbb{B}_n; \\ \langle M - \overline{\overline{M}}, S - \overline{\overline{M}} \rangle \leq 0, \quad \forall S \in \mathbb{B}_n. \end{cases} \quad (1)$$

□

Compte tenu du Théorème de Birkhoff (Théorème 1) et de la définition du produit scalaire ci-dessus, la caractérisation (1) est équivalente à la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{M}} \in \mathbb{B}_n, \\ \text{tr}((M - \overline{\overline{M}})^T(P - \overline{\overline{M}})) \leq 0, \quad \text{pour tout } P \text{ matrice de permutation.} \end{array} \right. \quad (2)$$

Pour trouver  $\overline{\overline{M}}$  en utilisant la caractérisation (2), on est amené à résoudre un système d'équations et inéquations, comportant en particulier  $n!$  inéquations. Il est facile d'en conclure que cette caractérisation a toutes les chances de ne pas nous permettre de calculer "*explicitement*"  $\overline{\overline{M}}$ , et ceci, même pour des petites valeurs de  $n$ . Manifestement en tout cas, l'approche directe semble ne pas pouvoir nous conduire à la solution du problème (P). Aussi, allons-nous nous rabattre sur une solution itérative, qui passe par la méthode de projections alternées de Boyle-Dykstra que nous introduisons maintenant.

## 2.2. LA MÉTHODE DE BOYLE-DYKSTRA

Cette méthode a été introduite pour répondre au problème suivant : on se place dans un espace de Hilbert  $H$ , et dans ce espace, on recherche le projeté d'un point quelconque sur l'intersection de convexes sur lesquels on sait projeter. Nous allons faire la présentation dans le cas où on cherche à projeter sur l'intersection  $C$  de deux convexes  $A$  et  $B$ . Le but de cette section est de présenter une méthode de projections qui permet de construire itérativement le point de  $C$  le plus proche d'un point  $x$  donné.

Pour commencer, nous introduisons la méthode de von Neumann qui, historiquement, a été la première solution algorithmique à la recherche du projeté d'un point quelconque sur l'intersection de convexes sur lesquels on sait projeter.

Notons  $\mathcal{P}_A$  et  $\mathcal{P}_B$  les opérateurs de projection respectivement sur  $A$  et  $B$ . On peut la décrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} a_n &\in A, b_n \in B, \\ a_{n+1} &= \mathcal{P}_A(b_n) \\ b_{n+1} &= \mathcal{P}_B(a_{n+1}) \\ \text{avec } b_0 &= x \in H \text{ et } a_0 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

On montre, voir [3], [23], que lorsque  $A$  et  $B$  sont des sous-espaces (vectoriels ou affines) fermés et que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont définies ci-dessus en (3), on a :

$$a_n, b_n \rightarrow \mathcal{P}_C(x) \text{ où } x = b_0.$$

Remarquons qu'on a :

$$b_{n+1} = \mathcal{P}_B(a_{n+1}) = \mathcal{P}_B \mathcal{P}_A(b_n). \quad (4)$$

Ainsi, la méthode de von Neumann peut se ramener à la construction d'une suite unique  $(b_n)$  définie comme en (4) et qui vérifie donc :

$$b_n \rightarrow \mathcal{P}_C(b_0).$$

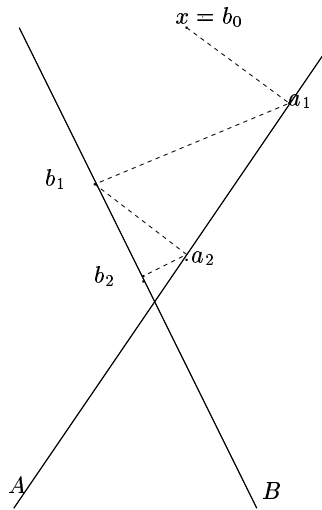


Figure 1. Illustration de l'algorithme de von Neumann

Ce résultat est facile à visualiser lorsqu'on se situe dans un espace de dimension 2. Ceci est illustré par la Figure 1.

En conclusion, lorsque les convexes fermés  $A$  et  $B$  sont en fait des sous-espaces, on sait comment construire itérativement le projeté d'un point quelconque. Historiquement, on peut dire que la méthode de von Neumann a constitué la première, mais surtout une des plus efficaces, solution au problème qui consiste à trouver la projection d'un point donné dans un espace de Hilbert sur l'intersection non vide d'un nombre fini de sous-espaces fermés.

La méthode de von Neumann introduite dans le cas de deux sous-espaces se généralise de manière naturelle aux cas d'un nombre fini de sous-espaces : on passe de projections alternées à des projections cycliques. Bregman [7] a étendu les résultats de convergence à ce cas.

Que se passe-t-il si on n'a plus les hypothèses de von Neumann, c'est-à-dire si l'un des convexes n'est pas un sous-espace ?

Regardons la Figure 2 : on cherche le projeté d'un point  $x$  sur l'intersection d'un cône  $A$  et d'une droite (sous-espace)  $B$ .

Il est facile de voir que le projeté sur  $A \cap B$  est l'extrémité droite du segment qui représente  $C = A \cap B$ , tandis que l'algorithme de von Neumann conduit à un point intérieur au segment.

Il y apparaît bien que si l'un des convexes n'est pas un sous-espace, les conclusions de convergence précédentes ne sont plus assurées. On montre (voir [3], [4]) que dans le cas général, on a toujours convergence au moins faible de l'algorithme de von Neumann ; mais le point limite obtenu est un point *quelconque* de  $C$ .

Que faire donc dans le cas général ?

Pour répondre à cette question, Dykstra a proposé une modification de l'algorithme de von Neumann. Le schéma en est le suivant : on construit quatre suites :  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  (appelées *suites principales*) et  $(p_n)$ ,  $(q_n)$  (appelées *suites auxiliaires*)

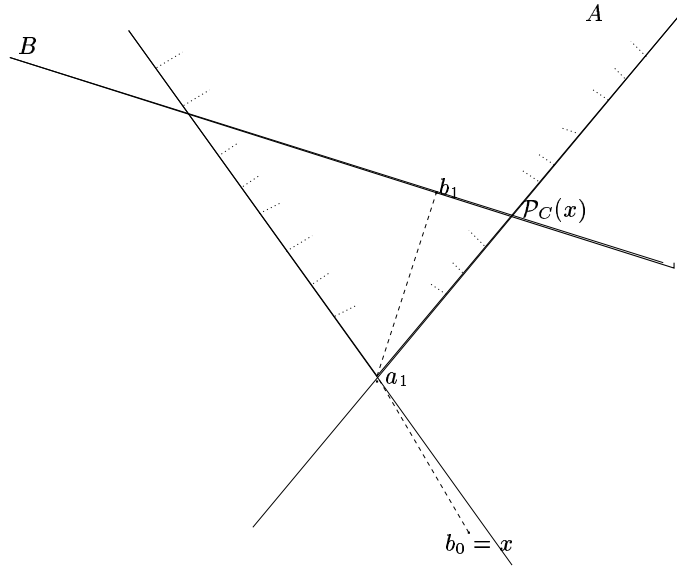


Figure 2. von Neumann sur l'intersection d'un sous-espace et d'une cône

comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0; b_0 = x \in H; p_0 = 0; q_0 = 0; \\ \mathbf{a}_{n+1} = \mathcal{P}_A(\mathbf{b}_n + \mathbf{p}_n) \\ p_{n+1} = b_n + p_n - a_{n+1} \\ \mathbf{b}_{n+1} = \mathcal{P}_B(\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{q}_n) \\ q_{n+1} = a_{n+1} + q_n - b_{n+1} \\ \text{avec } b_0 = x \in H \text{ et } a_0 = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Comme première remarque, notons les différences avec l'algorithme précédent de von Neumann. Elles tiennent essentiellement en la présence à chaque itération des vecteurs  $p_n$  et  $q_n$ . Ceux-ci sont calculés après projection sur chaque convexe et représentent, d'un point de vue géométrique, le *déplacement* effectué pour aller du nouvel itéré au point dont cet itéré est le projeté. Ce sont des vecteurs normaux aux convexes  $A$  et  $B$  respectivement.

La Figure 3 ci-après donne une illustration de l'algorithme de Boyle-Dykstra. Une itération de l'algorithme (par exemple, celle qui permet de passer de  $b_1$  à  $a_2$ ) peut être décrite de la manière suivante :

- on déplace le point courant (par exemple  $b_1$  sur la figure) dans la dernière direction normale ( $p_1$ ) au convexe sur lequel on doit projeter ( $A$ ) gardée en mémoire,
- on effectue la projection (sur  $A$ ) du point obtenu ( $b_1 + p_1$ ),
- on garde en mémoire la nouvelle direction normale ( $p_2$ ) obtenue ainsi que le résultat de la projection ( $a_2$ ) qui est le nouvel itéré courant.

Ce schéma a été proposé par Dykstra [10] en 1983 pour la recherche du projeté sur l'intersection (finie) de cônes convexes en dimension finie. Avec Boyle, [6], il l'a étendu en 1985 aux convexes généraux dans un espace de Hilbert quelconque. Cela a été fait pour résoudre des problèmes de type moindres carrés apparaissant en Statis-



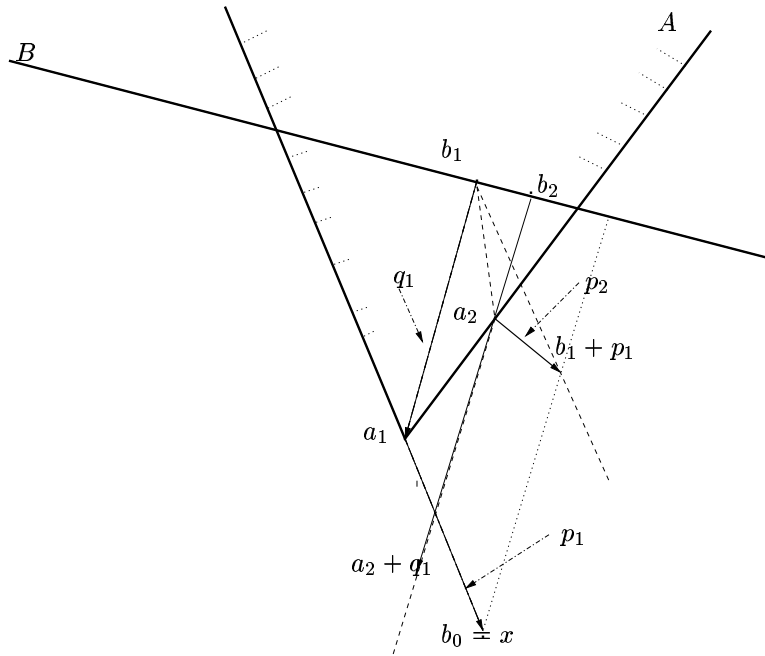


Figure 3. Illustration de l'algorithme de Boyle-Dykstra

tiques. Cet algorithme a été découvert indépendamment par Han [12] en 1988 dans un contexte de dualisation d'un problème d'optimisation dans un espace euclidien. Il lui a donné le nom de méthode de *projections successives*. De là viennent les deux noms (projections successives et Boyle-Dykstra) qui coexistent pour cette méthode dans la littérature. Cette approche par dualité a conduit à une belle justification (par Gaffke et Mathar [11]) de la convergence de l'algorithme.

En 1994, Bauschke et Borwein [4] ont proposé une superbe analyse de cette méthode de projections alternées dans le cas de deux convexes. Ce travail fait suite par ailleurs à une analyse similaire sur la méthode de von Neumann (voir [3]). On leur doit, entre autres, le résultat suivant, important du point de vue de notre travail.

**THÉORÈME 2 ([4])** *Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $A, B$  deux convexes fermés de  $H$  d'intersection non vide et  $x$  un point de  $H$ .*

*On définit les suites de Dykstra de la même manière qu'en (5).*

*Alors*

$$\|b_n - a_n\| \rightarrow 0 \text{ et } a_n, b_n \rightarrow \mathcal{P}_{A \cap B}(x). \quad (6)$$

où  $\mathcal{P}_{A \cap B}(x)$  désigne l'opérateur de projection sur l'intersection de  $A$  et  $B$ .

□

Pour la preuve de ce Théorème, l'article [4] de Bauschke et Borwein constitue une source très intéressante. La démonstration y est basée essentiellement sur les propriétés du produit scalaire et le théorème de projection dans un espace de Hilbert.

Les deux résultats du théorème ci-dessus sont intéressants pour nous puisque, d'une part, le second justifie l'usage d'un algorithme de Boyle-Dykstra pour la recherche du projeté sur une intersection de convexes. D'autre part, le premier aide,

quant à lui, à la mise en œuvre d'un test d'arrêt efficace lors de l'implémentation numérique de l'algorithme.

Lorsque l'on a plus de deux convexes, l'algorithme de Boyle-Dykstra se généralise de manière naturelle en faisant des projections cycliques. Lorsque leur intersection est non vide, les principales conclusions (6) du Théorème 2 restent valables.

Pour terminer, remarquons que le schéma de Boyle-Dykstra constitue une généralisation directe de celui de von Neumann (c'est pourquoi nous avons choisi de présenter les deux méthodes l'une après l'autre). En effet, lorsque  $A$  et  $B$  sont des sous-espaces,  $\mathcal{P}_A$  et  $\mathcal{P}_B$  sont linéaires et les vecteurs normaux aux sous-espaces  $A$  et  $B$  sont en fait orthogonaux à ces sous-espaces. Et on a ainsi :

$$\forall n, a_{n+1} = \mathcal{P}_A(b_n + p_n) = \mathcal{P}_A(b_n) + \mathcal{P}_A(p_n) = \mathcal{P}_A(b_n),$$

De même pour  $b_{n+1}$ .

Le calcul des  $p_n$  et  $q_n$  est inutile dans ce cas, et l'algorithme se ramène à celui de von Neumann. On peut même aller plus loin et, en fait, remarquer que lorsque l'un des convexes  $A$  ou  $B$  est un sous-espace, il est inutile de calculer la composante normale qui lui correspond.

### 2.3. PROJECTIONS ALTERNÉES SUR $\mathbb{B}_n$

Nous revenons à notre problème d'approximation par des matrices bistochastiques. Il est facile de voir que

$$\mathbb{B}_n = \Lambda^+ \cap \mathcal{LC}1,$$

où  $\Lambda^+ = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \geq 0\}$  et  $\mathcal{LC}1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid Me = e, M^T e = e\}$ . On remarque aussi, facilement, que  $\Lambda^+$  et  $\mathcal{LC}1$  sont des ensembles convexes; le premier étant un cône et le second un sous-espace affine. Cette écriture de  $\mathbb{B}_n$  en tant qu'intersection de convexes, nous permettra d'appliquer une méthode de type Boyle-Dykstra à la résolution de notre problème d'approximation.

#### 2.3.1. Projection sur $\Lambda^+$

On rappelle que pour un réel  $a$ , on note

$$a^+ = \max(a, 0).$$

Pour une matrice  $M = (a_{ij})$  de  $E$ , on appelle  $M^+ = (m_{ij})$  la matrice dont toutes les composantes sont définies par :

$$m_{ij} = a_{ij}^+, \quad \forall i, j.$$

On peut montrer facilement que :

PROPOSITION 2 ([13])

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{P}_{\Lambda^+}(M) = M^+.$$

□

### 2.3.2. Projection sur $\mathcal{LC}1$

Nous envisageons un problème de projection sur le sous-espace  $\mathcal{LC}1$ . Tout d'abord, nous introduisons les matrices suivantes :

- $J_n = (J_{ij})_{i,j}$  telle que  $\forall i, j \quad J_{ij} = 1/n$ .
- $W_n = I_n - J_n$ .

En appliquant une nouvelle fois le théorème de projection dans un espace de Hilbert et, plus précisément, son corollaire dans le cas des sous-espaces, on peut montrer :

PROPOSITION 3 ([20]) *Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On a :*

$$\forall M \in \mathbf{E}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{LC}1}(M) = W_n M W_n + J_n. \quad (7)$$

La démonstration de cette proposition constitue en grande partie l'article [20]. On y parvient par le corollaire du théorème de projection et en calculant explicitement l'orthogonal du sous-espace  $\mathcal{LC}1$ .

### 2.3.3. Projections alternées de Boyle-Dykstra sur $\mathbb{B}_n$

Nous avons appliqué l'algorithme de Boyle-Dykstra ci-dessus (5) à la résolution du problème d'approximation par des matrices bistochastiques, compte tenu du fait que  $\mathbb{B}_n$  est l'intersection du sous-espace  $\mathcal{LC}1$  et du cône  $\Lambda^+$ .

Nous avons proposé l'algorithme structuré comme suit :

#### Initialisation

$$B^0 = M$$

$$Q^0 = 0$$

Précision  $\varepsilon$

#### Itération

$$A^{k+1} = W_n B^k W_n + J_n \quad [= \mathcal{P}_{\mathcal{LC}1}(B^k)]$$

$$B^{k+1} = (A^{k+1} + Q^k)^+ \quad [= \mathcal{P}_{\mathcal{C}^+}(A^{k+1})]$$

$$Q^{k+1} = (A^{k+1} + Q^k) - (A^{k+1} + Q^k)^+$$

#### Test d'arrêt

$$\text{si } \|A^{k+1} - B^{k+1}\| < \varepsilon \text{ Stop}$$

sinon retour à Itération

où  $M$  est la matrice que l'on cherche à approcher par une matrice bistochastique.

Cet algorithme est tout simplement une adaptation de l'algorithme (5) à notre cas. Nous l'avons écrit en tenant compte du fait que l'un de nos convexes est un sous-espace, et qu'il est donc inutile d'en calculer les composantes normales à chaque itération. Le test d'arrêt est basé sur le fait qu'on doit avoir

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{k+1} - B^{k+1}\| = 0 \text{ (voir Théorème 2).}$$

### 3. PROBLÈMES D'AGRÉGATION DE PRÉFÉRENCES

#### 3.1. PRÉSENTATION DES PROBLÈMES D'AGRÉGATION DE PRÉFÉRENCES

On considère un ensemble  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  de  $m$  “votants” qui sont les individus appelés à donner leurs avis, donc à exprimer des préférences sur un ensemble  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  de  $n$  “objets” que nous appellerons également éléments ou candidats dans la suite. Ces objets peuvent être des candidats à une élection, différents projets d'investissements d'une société, etc. Le votant  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) exprime une préférence que nous notons  $P_i$  sur l'ensemble des  $n$  objets. Cela correspond en général à faire un classement de ces  $n$  objets. On souhaite alors *agrèger les préférences individuelles exprimées  $P_i$  en une préférence collective  $\bar{P}$*  représentant du mieux possible l'opinion collective. On définit alors :

**DÉFINITION 5** *On appelle **problème d'agrégation de préférences** le problème suivant :*

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Construire la préférence } \bar{P} \\ \text{qui soit la plus proche possible} \\ \text{des } m \text{ préférences individuelles } P_i \text{ exprimées.} \end{array} \right. \quad (8)$$

Une fois décrit formellement ce problème, se posent immédiatement deux questions :

1. comment (sous quelles formes) représenter les préférences ?
2. suivant quelles procédures ou règles agrège-t-on ces préférences ?

Il va de soi qu'à chaque réponse à ces questions correspond une modélisation et une manière de résoudre ces problèmes. Ces modélisations ont comme point commun qu'elles conduisent en général à un *problème d'optimisation*.

D'une manière générale, les préférences sont représentées par des relations binaires (donc parfois par des graphes) ayant un certain nombre de propriétés exprimant la préférence, l'indifférence et/ou l'incompatibilité entre les “éléments” (voir Monjardet [16], et surtout Vincke [22]). Nous prendrons dans la suite une représentation matricielle pour ces préférences.

La classification des procédures d'agrégation les plus utilisées n'est pas forcément aisée (voir [21], [22]). On peut considérer sommairement deux classes. Une première comprend les méthodes qui consistent à remplacer les différents critères (constitués ici par les différentes préférences exprimées) par un critère unique englobant du mieux possible ces critères. La méthode d'agrégation par pondérations que nous utilisons ici en fait partie. La seconde classe est celle des méthodes (voir [16]) qui consistent à chercher un ordre de préférence recueillant le nombre maximum de suffrages sur toutes les préférences par paires qu'il exprime. On dit que cette règle cherche à maximiser les accords ou minimiser les désaccords entre les différentes préférences exprimées. En ce qui concerne cette règle d'agrégation, on peut se référer à l'article de Monjardet [16] où l'auteur étudie les différentes formulations de problèmes qui correspondent à cette règle qui remonterait en fait à Condorcet en 1789. Pour plus d'informations, nous conseillons au lecteur intéressé de consulter les articles [1], [2], [9], [18], [19], [24], par exemple.

L'objet de ce travail est de proposer une généralisation de la procédure d'agrégation de Blin [5]. Toutefois, il nous faut préciser que cette procédure n'est pas très développée en Théorie des choix collectifs. Il n'existerait notamment pas d'axiomatisation de cette procédure. L'étude de la pertinence de cette procédure, la recherche d'une axiomatisation lui correspondant et des éventuels points communs qu'elle posséderait avec d'autres procédures existantes comme le classement par points (voir [19], [24]) sont autant de points importants auxquels il faudrait consacrer son attention. De même, un travail similaire sur la procédure par approximation par matrices bistochastiques que nous présentons ci-après est nécessaire. Mais ceci dépasse le cadre de cet article, nous n'aborderons donc pas ces thèmes.

### 3.2. UNE APPROCHE MATRICIELLE

Nous proposons maintenant une modélisation du problème d'agrégation de préférences (8) dans laquelle les préférences sont représentés par des matrices à composantes 0 – 1 qui seront agrégées par pondérations.

À chaque préférence, nous associons la matrice  $P$  définie par : pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , et  $j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'élément } i \text{ est classé en } j\text{ème position,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9)$$

Ainsi, les préférences seront représentées par des matrices  $n \times n$  à composantes 0 et 1 dont les lignes comportent au *maximum une composante non nulle* qui vaut alors 1. En effet, compte tenu des hypothèses que nous avons prises sur les préférences, une matrice  $P$  représentant une préférence peut avoir :

- une ligne entièrement nulle : il y a donc incompatibilité, le candidat (ou l'élément) correspondant à la ligne n'est pas classé ;
- une colonne comportant plusieurs 1 : il y a indifférence, on a des candidats ex aequo ;
- une colonne comportant un unique 1 : il y a préférence stricte.

Par exemple, pour un ensemble ordonné  $\{a, b, c, d, e\}$  de 5 candidats, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

représente la préférence

- $a$  premier,
- $b$  deuxième,
- $c$  pas classé,
- $d$  premier ex aequo,
- $e$  troisième.

Ces préférences vont être agrégées par pondérations. Cela consiste à attribuer un poids à chaque préférence et à faire la moyenne de ces préférences ainsi pondérées. On se ramène alors à chercher la préférence la plus "proche" de cette somme pondérée.

DÉFINITION 6 Soit  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m$  préférences sur un ensemble de candidats  $X$  de cardinal  $n$ . Soit  $\{w_i\}_{i=1,2,\dots,m}$  une famille de poids positifs tels que  $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ .

On dit que le problème d'agrégation de préférences (8) est **agrégé par pondérations** lorsqu'on le ramène au problème d'approximation suivant

$$\begin{aligned} &\text{Trouver la préférence (stricte) } \overline{P} \\ &\text{la plus "proche" (dans un sens à préciser) de } \sum_{i=1}^m w_i P_i. \end{aligned} \quad (10)$$

La technique d'agrégation par pondérations, encore appelée méthode de la moyenne pondérée semble être une des premières idées d'agrégation qui ait été proposée (voir [22], [21]). Elle avait l'avantage de ramener le problème à celui de la résolution d'un problème d'optimisation monocritère pour lequel on dispose d'algorithmes de résolutions performants. Elle est néanmoins quelque peu abandonnée ces dernières années parce qu'elle correspond en quelque sorte à un lissage des critères. Et qui dit lissage, dit forcément perte d'informations spécifiques qui peuvent s'avérer importantes. D'autre part, elle n'est manifestement pas adaptée si on a, comme c'est souvent le cas, des critères de nature fondamentalement différentes : des critères qualitatifs et quantitatifs. Néanmoins, nous pensons qu'elle fournit une première solution souvent intéressante dans l'analyse du problème et qui peut servir de point de départ aux autres méthodes proposées (qui sont souvent de nature combinatoire).

Si nous revenons à notre cadre de travail, chaque préférence exprimée est représentée par une matrice  $P_i$ . On cherche une préférence stricte  $\overline{P}$  qui reflète l'opinion générale, elle est représentée par une matrice de permutation. Le problème d'agrégation de préférences par pondérations (10) se ramène au problème d'approximation matricielle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\sum_{i=1}^m w_i P_i - \overline{P}\| = \min \\ \text{tel que } P \text{ matrice de permutation,} \end{array} \right. \quad (11)$$

où le fait d'être plus proche, évoqué plus haut en (10), est compris au sens de la norme  $\|\cdot\|$ .

On retrouve en fait sous une forme plus générale une formulation proposée par Blin pour un problème d'agrégation de préférence avec certaines hypothèses sur les préférences, notamment :

- les préférences portent sur tous les éléments : tous doivent être classés ;
- les préférences sont strictes : l'incompatibilité et l'indifférence ne sont pas autorisées.

Sous ces hypothèses, il est facile de voir que *les préférences (strictes) exprimées sont représentées par des matrices de permutation*. Alors, la matrice moyennes pondérées  $\sum_{i=1}^m w_i P_i$  de ces matrices de permutations est une matrice bistochastique, puisqu'elle apparaît en fait comme une combinaison convexe de matrices de permutation (voir section 2), car  $\sum_{i=1}^m w_i = 1$  et  $w_i > 0$  pour tout  $i$ .

Prenons en particulier des poids tous égaux, c'est à dire,

$$\forall i = 1, 2, \dots, m \quad w_i = \frac{1}{m}.$$

La moyenne pondérée des préférences vaut alors

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_i.$$

Notons :

$$\Pi = \sum_{i=1}^m P_i \text{ et } \tilde{\Pi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_i.$$

Il est facile de voir que pour  $l = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$\Pi_{lk}$  = nombre de fois où le candidat  $l$  est classé en  $k$ ème position.

On retrouve ainsi avec  $\Pi$  la matrice définie par Blin [5] de la manière évoquée ci-dessus (nombre de fois où un candidat est classé dans une position) et dénommé *matrice d'agrément* du problème. Dans ce cas,  $\tilde{\Pi}$  est appelée *normalisée* de la matrice d'agrément.

On se ramène alors à chercher la matrice de permutation la plus proche de la matrice bistochastique  $\tilde{\Pi}$ . Cette formulation est celle proposée par Blin. Cet auteur l'appelle méthode de projection sur les sommets (*vertex projection method*, en anglais).

Revenons au cas général. Par analogie, (et abus), avec Blin, nous allons appeler *matrice d'agrément* la moyenne pondérée  $\sum_{i=1}^m w_i P_i$  des préférences, et la noter  $\Pi$ .

Les hypothèses considérées par Blin avaient le défaut de ne pas prendre en compte des situations qui se produisent souvent en pratique, entre autres :

- erreurs dans les classements, perte de données ;
- possibilité d'avoir des ex aequo, des "objets" non classés ( exprimant par exemple de l'incompatibilité, de l'indifférence, etc ... ) ;
- possibilité que le nombre de candidats soit connu seulement *a posteriori*, comme nous le verrons dans un exemple plus tard.

Nous nous proposons ici d'affaiblir les hypothèses faites par Blin sur les préférences, de manière à prendre en compte ces situations.

En ce qui concerne le problème (11), notons tout d'abord qu'il admet des solutions optimales. En effet, on effectue une minimisation sur un ensemble **fini** de solutions réalisables. L'optimum existe donc et est atteint. Par contre, l'unicité de la solution n'est pas acquise. En fait, comme nous le verrons plus loin, cela est induit par le fait qu'un programme linéaire n'a pas forcément une solution optimale unique.

Pour la résolution du problème (11), nous proposons pour la résolution un schéma en deux phases. Cette séparation en deux est motivée entre autres par le désir de résoudre le problème en utilisant des outils déjà existants. Une fois construite la matrice d'agrément  $\Pi$ ,

*Phase 1* : on recherche la matrice bistochastique  $\Pi_{\mathbb{B}_n}$  la plus proche de  $\Pi$  en utilisant l'algorithme de projections alternées évoqué en section 2,

*Phase 2* : on met en œuvre la méthode de projection sur les sommets ("vertex projection method") de Blin [5] pour rechercher la matrice de permutation la plus proche de  $\Pi_{\mathbb{B}_n}$ .

## 4. QUELQUES EXEMPLES NUMÉRIQUES

Nous avons appliqué le schéma de résolution par étapes suivant :

- 1 On construit la matrice d'agrément par moyenne pondérées. On obtient une matrice  $\Pi^{norm}$  à composantes comprises entre 0 et 1, mais qui n'est pas bistochastique ;
- 2 On calcule la matrice bistochastique la plus proche de  $\Pi$  en utilisant l'algorithme défini en section 2. On obtient la matrice  $\Pi_{\mathbb{B}_n}$  bistochastique.
- 3 On résout le problème  $\min d(P, \Pi_{\mathbb{B}_n})$ ,  $P$  matrice de permutation, où  $d$  est la distance induite par la norme de Fröbenius.

Nous avons considéré, dans tous les tests numériques que nous présentons ci-après, des poids tous égaux (à  $\frac{1}{m}$ ).

### 4.1. RÉOLUTION DE L'ÉTAPE 3

Nous revenons sur l'étape 3 où on cherche la matrice de permutation la plus proche d'une matrice bistochastique. On cherche à résoudre le problème d'approximation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Pi_{\mathbb{B}_n} - \bar{P}\| = \min \\ \text{tel que } P \text{ matrice de permutation.} \end{array} \right. \quad (12)$$

C'est un problème d'optimisation convexe en variables 0 – 1. Pour le résoudre, on a deux stratégies.

#### 4.1.1. Programmation linéaire

En nous souvenant du développement du carré de la norme dans un espace de Hilbert, la fonction-objectif du problème (12) s'écrit :

$$\|P - \Pi_{\mathbb{B}_n}\|^2 = \|P\|^2 - 2\langle P, \Pi_{\mathbb{B}_n} \rangle + \|\Pi_{\mathbb{B}_n}\|^2 \quad (13)$$

Or, comme  $P$  est une matrice de permutation, on a :

$$\|P\|^2 = n, \text{ pour toute matrice } P \text{ de permutation.}$$

Minimiser la quantité  $\|P - \Pi_{\mathbb{B}_n}\|$  revient donc (quitte à considérer le carré de la norme) à *maximiser* le produit scalaire :  $\langle P, \Pi_{\mathbb{B}_n} \rangle$ . On se ramène ainsi à une fonction-objectif linéaire.

D'autre part, l'ensemble des points réalisables du problème, est l'ensemble des matrices de permutations. C'est donc l'ensemble des points extrémaux du polytope convexe des matrices bistochastiques. Or, optimiser un critère linéaire sur l'ensemble des points extrémaux d'un polytope peut se ramener à optimiser le même critère sur le polytope tout entier, puisqu'on sait (voir [17]) qu'il existe un point extrémal solution d'un tel problème. Il suffit donc par exemple de le résoudre en utilisant la méthode du simplexe qui se termine toujours en un point extrémal.



Ainsi, l'étape 3 revient à résoudre le problème de programmation linéaire en variables 0 – 1 :

$$\begin{cases} \langle \Pi_{\mathbb{B}_n}, \overline{P} \rangle = & \max \\ \text{tel que } P \in \mathbb{B}_n, P \text{ de permutation,} & \end{cases} \quad (14)$$

que l'on résout (ou plutôt sa relaxation continue) par la méthode du simplexe de manière à en obtenir une solution extrême, c'est-à-dire une matrice de permutation.

#### 4.1.2. Optimisation combinatoire

En pratique, pour résoudre le problème linéaire (14), on résout sa relaxation continue qui est le même problème dans lequel on a relaxé la contrainte stipulant que  $P$  doit être à composantes entières (0 et 1). Le fait d'utiliser la méthode du simplexe permet cela. Si l'on ne fait pas cette relaxation, notons  $P_{ij}$  les composantes de la matrice  $P$  et  $\Pi_{ij}$  celles de  $\Pi_{\mathbb{B}_n}$ . Alors le problème (14) s'écrit :

$$\begin{cases} \max & \sum_{i,j=1}^n \Pi_{ij} P_{ij} \\ \text{tel que} & \sum_{j=1}^n P_{ij} = 1, \quad \forall i \\ & \sum_{i=1}^n P_{ij} = 1 \quad \forall j \\ & P_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \\ & P_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall i, j. \end{cases} \quad (15)$$

On reconnaît ici un exemple du “problème de mariages dans un graphe bipartite pondéré”, *weighted bipartite matching problem* en anglais, (voir [17]). On est donc ramené à un problème d'optimisation dans un graphe, qui dans un certain sens, peut être vu comme un problème d'affectation de tâches (*assignment problem*, en anglais).

On peut donc mettre en œuvre, pour résoudre (15), des méthodes d'optimisation combinatoire existantes, de complexité polynomiale. Nous sommes en cours d'implémentations numériques de telles méthodes, notamment la méthode dite hongroise (*Hungarian method*, en anglais : voir [17]) pour les problèmes d'affectation. Cette méthode devrait produire un résultat plus exact (notamment pour trouver les composantes entières 0 et 1), et il a été prouvé qu'elle résout le problème exactement en  $O(n^3)$  opérations arithmétiques.

## 4.2. TESTS NUMÉRIQUES

Nous avons testé l'algorithme sur différentes gammes de tests. Nous en présentons ici deux. Dans tous ces exemples, nous avons pris des poids tous égaux à  $\frac{1}{m}$ .

### 4.2.1. Exemple avec perte de données

Nous avons considéré comme première situation, celle où des pertes d'informations sur les données auraient eu lieu. Dans tous les cas où il manquait des informations dans les préférences exprimées, nous avons supposé que ce manque exprimait une incompatibilité.

Nous avons considéré l'ensemble  $X = \{a, b, c, d, e\}$  de  $n = 5$  candidats, pour lequel les  $m = 6$  préférences suivantes sont exprimées :

$$P_1 \begin{cases} a & \text{premier,} \\ b & \text{quatrième,} \\ c & \text{troisième,} \\ d & \text{pas classé,} \\ e & \text{pas classé.} \end{cases}, \quad P_2 \begin{cases} a & \text{premier,} \\ b & \text{quatrième,} \\ c & \text{deuxième,} \\ d & \text{troisième,} \\ e & \text{cinquième.} \end{cases}, \quad P_3 \begin{cases} a & \text{deuxième,} \\ b & \text{quatrième,} \\ c & \text{premier,} \\ d & \text{troisième,} \\ e & \text{cinquième.} \end{cases},$$

$$p_4 \begin{cases} a & \text{pas classé,} \\ b & \text{premier,} \\ c & \text{pas classé,} \\ d & \text{quatrième} \\ e & \text{cinquième.} \end{cases}, \quad p_5 \begin{cases} a & \text{troisième} \\ b & \text{deuxième,} \\ c & \text{cinquième,} \\ d & \text{quatrième,} \\ e & \text{premier.} \end{cases}, \quad p_6 \begin{cases} a & \text{troisième,} \\ b & \text{pas classé,} \\ c & \text{deuxième,} \\ d & \text{cinquième,} \\ e & \text{pas classé.} \end{cases}$$

On obtient la matrice d'agrément suivante :

$$\Pi = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice bistochastique obtenue avec un critère d'arrêt  $\varepsilon = 10^{-20}$  après approximation est :

$$\bar{\Pi}_{\mathbb{B}_n} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} .3600 & .2267 & .3600 & .0267 & .0267 \\ .1933 & .2267 & .0267 & .5267 & .0267 \\ .1933 & .3933 & .1933 & .0267 & .1933 \\ .0267 & .0600 & .3600 & .3600 & .1933 \\ .2267 & .0933 & .0600 & .0600 & .5600 \end{pmatrix}.$$

La matrice de permutation optimale obtenue est alors :

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci nous donne comme classement agrégé :

$$\bar{P} \begin{cases} a & \text{premier,} \\ b & \text{quatrième,} \\ c & \text{deuxième,} \\ d & \text{troisième,} \\ e & \text{cinquième.} \end{cases}$$

Signalons que nous avons construit cet exemple en modifiant un exemple proposé par Blin. L'ordre agrégé que nous avons obtenu ici est le même que celui obtenu par Blin qui avait, lui, des préférences portant sur tous les candidats à chaque fois. Cette remarque, quoique surprenante, n'est aucunement significative : on peut obtenir une toute autre solution optimale. Ceci montre bien qu'il n'y a pas unicité des solutions.

#### 4.2.2. Exemple avec nombre de candidats connu a posteriori

Nous proposons maintenant un exemple dans lequel le nombre de candidats  $m$  n'est pas défini à l'avance. Cet exemple est tiré d'un magazine de football *Onze Mondial*<sup>2</sup>, ce qui est une illustration, selon nous, du fait que les mathématiques peuvent s'appliquer dans presque tous les domaines de la vie, même les plus insoupçonnés.

La situation est la suivante : après une journée de championnat de football, on demande à un collège de 11 journalistes (qui représentent donc les votants) de désigner (classer) chacun exactement 11 joueurs qu'ils considèrent (dans l'ordre) comme les meilleurs. On cherche à partir de ces onze classements exprimés à établir le classement général des onze meilleurs joueurs de la journée.

Ainsi, on est devant un problème dans lequel on ne connaît pas a priori le nombre de candidats sur lesquels les préférences seront exprimées. Ce nombre sera connu seulement une fois les préférences exprimées. On sait seulement qu'il va varier entre 11 et 121. De par cette nature, ce type de problème ne peut pas vérifier les hypothèses de Blin. Cela justifie a posteriori les motivations de notre travail. Dans l'exemple ci-après, le nombre de candidats est finalement  $n = 38$ .

Pour représenter graphiquement les matrices, nous traçons le graphe 3D de la fonction définie par

$$(i, j) \mapsto M_{ij}$$

On obtient une matrice d'agrément représentée par la Figure 4.

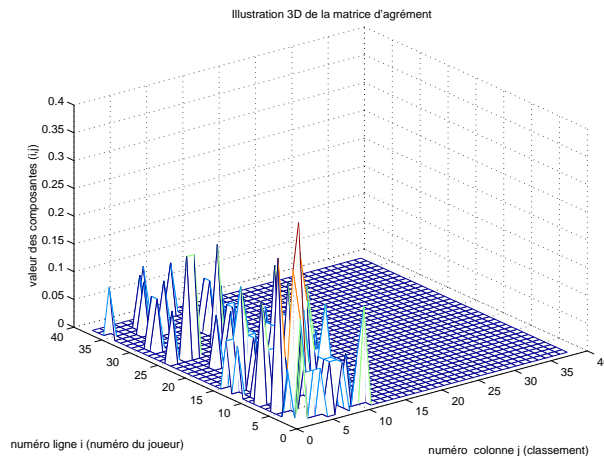


Figure 4. Illustration 3D de la matrice d'agrément

<sup>2</sup>Disponible dans tous les kiosques à journaux. L'exemple que nous proposons se trouve dans le numéro de décembre 2001.

La matrice de permutation que nous obtenons est illustrée par la Figure 5.

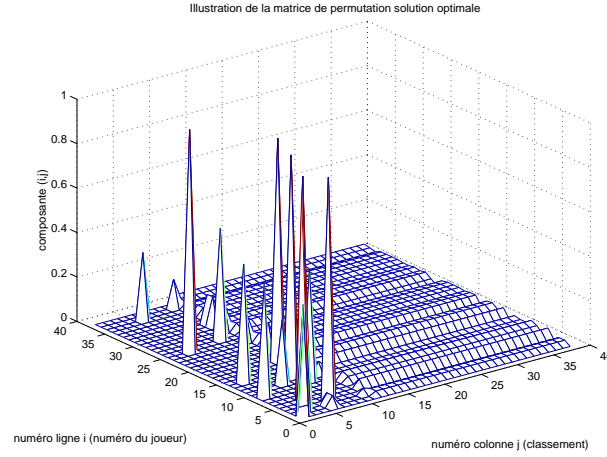


Figure 5. Illustration 3D de la matrice de permutation optimale obtenue

Concernant cette dernière figure, nous aurions dû visualiser 38 pics uniquement, tout le reste de la surface étant plat. La différence que nous observons est due au critère d'arrêt que nous avons utilisé. Toutefois, elle est suffisante pour nous, puisque notre but est d'obtenir un classement des onze premiers.

Nous avons comparé le classement que nous avons obtenu avec celui obtenu dans le journal. Celui-ci a été établi en utilisant la fonction de choix social de Borda (voir [19], [24]). Ceci consiste à attribuer un joueur 11 points à chaque fois qu'il est classé premier, 10 points s'il est second, et ainsi de suite. Le classement est effectué après cumul des points obtenus par chaque jour, de celui qui en a le plus (classé premier) à celui qui en a le moins. Seuls les onze premiers du classement sont pris en compte. Dans les résultats nous avons obtenus, nous avons 6 joueurs classés aux mêmes positions que dans le classement obtenu par Borda.

## 5. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons étudié précédemment le problème classique d'agrégation de préférences. À partir d'une modélisation matricielle des préférences, nous avons proposé une formulation mathématique dont nous avons montré qu'elle généralise la formulation qu'avait proposée Blin [5] sous certaines hypothèses que nous affaiblissons donc au passage. D'autre part, nous proposons un schéma de résolution de notre formulation en effectuant dans un premier temps une approximation par des matrices bistochastiques. Cela nous permet de terminer la résolution par celle d'un programme linéaire.

Une suite naturelle de ce travail consiste, dans un premier temps, à continuer la mise en œuvre numérique des algorithmes d'optimisation combinatoire que nous avons évoqués comme autre possibilité de terminer la résolution que nous avons proposée. Nous souhaitons aussi pouvoir tester ce schéma sur des problèmes concrets

issus de la pratique. Une perspective plus générale consiste à aborder l'axiomatisation de la procédure de Blin, à étudier la pertinence de la procédure d'approximation par matrices bistochastiques que nous avons présentée, et surtout à établir les liens qui peuvent exister entre ces procédures et d'autres qui existent en Théorie des choix collectifs.

*Remerciements.* Je voudrais remercier Jean-Baptiste Hiriart-Urruty et Marcel Mongeau (mes directeurs de thèse) pour les nombreuses discussions fructueuses que nous avons eues à propos de cette étude. J'associe à ces remerciements Nelson Maculan qui a attiré mon attention sur le fait qu'on avait un problème de *weighted matching* en section 4.1.

De plus, les lecteurs-arbitres ont fait un travail de critique constructif tout à fait intéressant, ce qui a permis d'améliorer la forme finale de ce travail.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BALINSKI M., BAÏOU M., and LARAKI R., « Dossier spécial Élections », *Pour la Science*, 294, avril 2002.
- [2] BARRETT C.R., PATTANAIK P.K. and SALLES M., « Rationality and aggregation of preferences in an ordinally fuzzy framework », *Fuzzy Sets and Systems*, 49(1), 1992, p. 9–13.
- [3] BAUSCHKE H. and BORWEIN J., « On the convergence of von Neumann's alternating projection algorithm for two sets », *Set-Valued Analysis*, 1(2), 1993, p. 185–212.
- [4] BAUSCHKE H. and BORWEIN J., « Dykstra's alternating projection algorithm for two sets », *Journal of Approximation Theory*, 79(3), 1994, p. 418–443.
- [5] BLIN J.-M., « A linear assignment formulation of the multiattribute decision problem », *RAIRO Recherche opérationnelle/Operations Research, Série Verte*, 10(2), 1976, p. 21–32.
- [6] BOYLE J.P. and DYKSTRA R.L., « A method for finding projections onto the intersection of convex sets in Hilbert spaces », in R.L. Dykstra, T. Robertson and F.T. Wright, eds., *Advances in Order Restricted Statistical Inference*, volume 37 of *Lecture Notes in Statistics*, Springer-Verlag, 1985, p. 28–47.
- [7] BREGMAN L., « The method of successive projection for finding a common point of convex sets », *Soviet Mathematics Doklady*, 6, 1965, p. 605–611.
- [8] BREZIS H., *Analyse fonctionnelle. Théories et Applications*, Masson, 1983.
- [9] CHARON I. and HUDRY O., « Lamarckian genetic algorithms applied to the aggregation of preferences », *Annals of Operations Research*, 80, 1998, p. 281–297.
- [10] DYKSTRA R.L., « An algorithm for Restricted Least Squares Regression », *Journal of the American Statistical Association*, 78(384), 1983, p. 837–842.
- [11] GAFFLE N. and MATHAR R., « A cyclic projection algorithm via duality », *Metrika*, 36, 1989, p. 29–54.

- [12] HAN S.P., « A successive projection method », *Mathematical Programming*, 40, 1988, p. 1–148.
- [13] HIGHAM N.J., « Matrix nearness problems and applications », in M.J.C. Gover and S. Barnett eds., *Applications of Matrix Theory*, Oxford University Press, 1989, p. 1–27.
- [14] HIRIART-URRUTY J.-B., *Optimisation et Analyse convexe*, Presses Universitaires de France, 1998.
- [15] MARSHALL A.W. and OLKIN I., « Inequalities : Theory of Majorization and Its Applications », *Mathematics in Sciences and Engineering*, Vol. 143, Academic press, 1979.
- [16] MONJARDET B., « Sur diverses formes de la “règle de Condorcet” d’agrégation des préférences », *Mathématiques Informatique et Sciences humaines*, 111, 1990, p. 61–71.
- [17] PAPADIMITRIOU C. and STEIGLITZ K., *Combinatorial optimization. Algorithms and complexity*, Prentice-Hall, 1982.
- [18] SLOADAS C., « Conditioning and aggregation of preferences », *Econometrica*, 65(2), 1997, p. 347–367.
- [19] SMITH J.H., « Aggregation of preferences with variable electorate », *Econometrica*, 41(6), 1973, p. 1027–1041.
- [20] TAKOUDA P., *Un problème d’approximation matricielle : quelle est la matrice bistochastique la plus proche d’une matrice donnée ?*, Technical report, Laboratoire MIP, Université Paul Sabatier, Toulouse 3, 2002. Research Report MIP 02-21. Accessible on the web at the url : <http://mip.ups-tlse.fr/publi/2002.html>, [submitted].
- [21] VANDERPOOTEN D., *Aide multicritère à la décision ; quelques concepts et perspectives*. Exposé de synthèse aux Quatrièmes journées nationales de la ROADEF, Paris, février 2002.
- [22] VINCKE P., *L’aide multicritère à la décision*, Paris, Ellipses, 1989.
- [23] von NEUMANN J., *Functionnal Operators, volume(II). The geometry of Orthogonal spaces*, *Annals of mathematical studies*, vol. 22, Princeton university Press, 1950. Reprints of mimeographed lectures notes first distributed in 1933.
- [24] YOUNG H.P., « Social choice scoring functions », *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 28(4), 1975, p. 824–838.